• Να βρεθούν τα σημεία ακροτάτων της συνάρτησης
$f(x,y) = (4x^2+y^2)\cdot e^{-x^2-4y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
και έπειτα να χαρακτηρισθούν.

ΛΥΣΗ

$f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και μάλιστα άπειρα διαφορίσιμων

Έπειτα, υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους:

• $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x\cdot e^{-x^2-4y^2} + (4x^2+y^2)\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2-4y^2} =$
$= 8x\cdot e^{-x^2-4y^2} - (2x\cdot 4x^2 + 2x\cdot y^2)\, e^{-x^2-4y^2} =$
$= e^{-x^2-4y^2}(8x - 8x^3 - 2x\cdot y^2)$

• $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cdot e^{-x^2-4y^2} + (4x^2+y^2)\cdot(-8y)\cdot e^{-x^2-4y^2} =$
$= 2y\cdot e^{-x^2-4y^2} - (8y\cdot 4x^2 + 8y\cdot y^2)\cdot e^{-x^2-4y^2} =$
$= e^{-x^2-4y^2}(2y - 32y\cdot x^2 - 8y^3)$

Άρα, το ανάδελτα της f είναι

$$\nabla f(x,y) = e^{-x^2-4y^2}(8x-8x^3-2xy^2,\ 2y-32yx^2-8y^3)$$

Έπειτα, $\nabla f(x,y) = (0,0)$ βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία

$$\begin{cases} 8x-8x^3-2xy^2=0 \\ 2y-8y^3-32yx^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-4x^3-xy^2=0 \\ y-4y^3-16yx^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(4-4x^2-y^2)=0 \\ y(1-4y^2-16x^2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \text{ ή } 4-4x^2-y^2=0 \\ y=0 \text{ ή } 1-4y^2-16x^2=0 \end{matrix}$$

• Για $x=0 \rightarrow y=0$
• Για $x=0 \rightarrow 1-4y^2=0 \Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}$
• Για $y=0 \rightarrow x=0.$
• Για $y=0 \rightarrow 4-4x^2=0 \Rightarrow x=\pm 1$

Άρα, τα κρίσιμα σημεία είναι τα
$(0,0)$, $(0,\pm\frac{1}{2})$ και $(\pm 1, 0)$

Δηλαδή σε αυτά ισχύει: $\nabla f(x_0,y_0)=0$

Στη συνέχεια, βρίσκουμε τον Εσσιανό πίνακα της f

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2-4y^2}\cdot(8x-8x^3-2xy^2)\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x^2-4y^2}\cdot(8x-8x^3-2xy^2)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2-4y^2}\cdot(2y-32x^2y-8y^3)\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-x^2-4y^2}\cdot(2y-32x^2y-8y^3)\right) \end{pmatrix}=$$

$$=e^{-x^2-4y^2}\begin{pmatrix} 8-40x^2-2y^2+16x^4+4x^2y^2 & -60xy+64x^3y+16xy^3 \\ -4xy+64x^3y+16yx^2+128x^3 & 256x^2y^2+64y^4-40y^2-32x^2+2 \end{pmatrix}$$

- $Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Θετικά ορισμένος πίνακας άρα από θεώρημα ικανής συνθήκης τοπ. ακροτάτου παρουσιάζει στο $(0,0)$ γν. τοπ. ελάχιστο

- $Hf(0,\pm\frac{1}{2})=e^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, μη ορισμένος πίνακας συνεπώς δεν παρουσιάζει ακρότατο στα σημεία $(x_0,y_0)=(0,\pm\frac{1}{2})$

- $Hf(\pm1,0)=\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -30 \end{pmatrix}$, Αρνητικά ορισμένος πίνακας, άρα στα $(\pm1,0)$ παρουσιάζει γν. τοπ. μέγιστο